ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ THU TRANG

TÍNH BẤT KHẢ QUY CỦA ĐA THỨC VỚI HỆ SỐ NGUYÊN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ THU TRANG

TÍNH BẤT KHẢ QUY CỦA ĐA THỨC VỚI HỆ SỐ NGUYÊN

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TS. Lê Thị Thanh Nhàn

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Lời cảm ơn

Trước tiên tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc nhất tới GS.TS Lê Thị Thanh Nhàn. Mặc dù rất bận rộn trong công việc, song ngay từ những ngày đầu tiên Cô đã luôn tận tình chỉ bảo, hướng dẫn và đưa ra những lời khuyên có ích giúp tôi hoàn thiện luận văn này.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn tới các thầy, cô cán bộ khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Ban giám hiệu và các đồng nghiệp trường Trung học phổ thông Hoành Bồ - Tỉnh Quảng Ninh cùng các bạn tập thể lớp Cao học Toán K11D, đã không chỉ trang bị cho tôi những kiến thức bổ ích mà còn luôn luôn giúp đỡ tôi, tạo điều kiện cho tôi trong thời gian theo học tại trường.

Cuối cùng, tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn đến gia đình, bạn bè, những người đã không ngừng ủng hộ, động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện giúp tôi vượt qua những khó khăn để hoàn thiện luận văn.

Mở đầu

Tính bất khả quy của đa thức với hệ số nguyên trên trường các số phức $\mathbb{C}$ và trên trường các số thực $\mathbb{R}$ đã được giải quyết từ thế kỷ 19 thông qua Định lý cơ bản của Đại số. Tuy nhiên, tính bất khả quy của đa thức với hệ số nguyên trên trường các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ đến nay vẫn đang thách thức các nhà Toán học trên thế giới.

Trong luận văn này, tác giả trình bày lại một số tiêu chuẩn bất khả quy của đa thức trên trường số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ với hệ số nguyên trong các bài báo gần đây [8] và [11].

Luận văn gồm 2 chương. Trong chương 1, chúng tôi trình bày hai tiêu chuẩn bất khả quy nổi tiếng. Phần 1.1 trình bày Tiêu chuẩn Eisenstein và các mở rộng. Phần 1.2 trình bày tiêu chuẩn rút gọn theo module một số nguyên tố và phát biểu đảo của tiêu chuẩn này. Nội dung chương 1 được viết theo bài báo [11] cuả R. Thangadurai năm 2007.

Chương 2 trình bày các tiêu chuẩn bất khả quy trên trường các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ liên quan đến các giá trị khả nghịch và giá trị nguyên tố của đa thức với hệ số nguyên. Phần 2.1 trình bày các tiêu chuẩn về sự liên quan giữa giá trị khả nghịch với tính bất khả quy của đa thức. Phần 2.2 trình bày về mối quan hệ giữa giá trị nguyên tố và tính bất khả quy. Các kết quả ở hai phần này cũng được viết dựa theo bài báo [11] của R. Thangadurai năm 2007. Phần 2.3 trình bày một tiêu chuẩn bất khả quy mới trên trường $\mathbb{Q}$ các số hữu tỷ liên quan đến đa thức có các hệ số nguyên tăng dần theo chỉ số và có hệ số cao nhất nguyên tố hoặc nhận ít nhất một giá trị nguyên tố. Kết quả của phần này được viết dựa theo bài báo [8] của A. Jakhar và N. Sangwan năm 2018. Phần 2.4 trình bày về giá trị nguyên tố tại đối số đủ lớn và tính bất khả quy của đa thức với hệ số nguyên. Nội dung của phần này được viết trên cơ sở nội dung bài báo [11] của R. Thangadurai năm 2007.

Trong luận văn này, các tiêu chuẩn trong các phần 2.1 về giá trị khả nghịch và tính bất khả quy; phần 2.2 về giá trị nguyên tố và tính bất khả quy; phần 2.3 về tiêu chuẩn mới cho tính bất khả quy là những kết quả chưa được trình bày trong bất cứ luận văn thạc sĩ nào trước đây.

Hơn thế, trong các phần 1.1, 1.2, 2.4, mặc dù có một số kết quả đã quen biết và được trình bày trong một vài luận văn trước đây (xem [1], [2]), nhưng cách chứng minh và ví du hầu như là mới, do chính tác giả luận văn tự tính toán. Đặc biệt nếu trong luận văn [2], Nguyễn Văn Lập chứng minh đa thức $x^4 - 2x^2 + 9$ là bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ nhưng không bất khả quy trên $\mathbb{Z}_p$ với mọi số nguyên tố p bằng cách sử dụng kiến thức về nhóm, thì trong luận văn này chứng minh đa thức $x^4 + 1$ bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ nhưng khả quy trên $\mathbb{Z}_p$ với mọi số nguyên tố p bằng cách sử dụng kiến thức về trường hữu hạn.

Thái Nguyên, ngày 25 tháng 5 năm 2019

Tác giả luận văn

Phạm Thị Thu Trang

Chương 1

Tiêu chuẩn Eisenstein và tiêu chuẩn rút gọn theo module một số nguyên tố

Một đa thức với hệ số trên một trường được gọi là *bất khả quy* nếu nó có bậc dương và không phân tích được thành tích của hai đa thức có bậc thấp hơn. Một đa thức bậc dương với hệ số trên một trường là *khả quy* nếu nó là tích của hai đa thức với bậc thấp hơn.

Chú ý rằng tính bất khả quy của đa thức phụ thuộc vào trường cơ sở. Chẳng hạn, đa thức $x^2 - 2$ là bất khả quy trên trường $\mathbb{Q}$ các số hữu tỷ, nhưng không bất khả quy trên trường $\mathbb{R}$ các số thực. Đa thức $x^2 + 1$ bất khả quy trên trường $\mathbb{R}$ nhưng không bất khả quy trên trường $\mathbb{C}$ các số phức.

Tính bất khả quy trên trường các số phức và trên trường các số thực đã được làm rõ nhờ Định lý cơ bản của Đại số: *Mọi đa thức bậc dương với hệ số phức đều có ít nhất một nghiệm phức.* Vì thế các đa thức bất khả quy trên $\mathbb{C}$ là và chỉ là các đa thức bậc nhất. Các đa thức bất khả quy trên $\mathbb{R}$ là và chỉ là các đa thức bậc nhất hoặc đa thức bậc hai có biệt thức âm.

Câu hỏi được đặt ra là khi nào đa thức $f(x)$ đã cho là khả quy hay bất khả quy trên $\mathbb{Q}$? Cho đến nay, không có điều kiện cần và đủ nào có thể áp dụng được cho tất cả các đa thức, mà ta chỉ có một số tiêu chuẩn để kiểm tra tính bất khả quy của một số trường hợp cụ thể.

Rõ ràng mọi đa thức bậc nhất đều bất khả quy trên $\mathbb{Q}$. Các đa thức bậc hai và bậc ba là bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ nếu và chỉ nếu nó không có nghiệm hữu tỷ. Đối với đa thức bậc lớn hơn 3, nếu đa thức có nghiệm hữu tỷ thì nó không bất khả quy. Tuy nhiên điều ngược lại không đúng. Chẳng hạn, đa thức $(x^2+1)^2$ không có nghiệm hữu tỷ, nhưng không bất khả quy.

Trong chương này, chúng tôi trình bày hai tiêu chuẩn nổi tiếng về tính bất khả quy trên trường các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ của đa thức với hệ số nguyên dựa theo bài báo [11] của R. Thangadurai. Phần thứ nhất dành để trình bày Tiêu chuẩn Eisensrein và một số mở rộng của nó. Mở rộng thứ nhất được phát hiện bởi H. Chao trong bài báo *A Generalization of Eisenstein's Criterion*, Mathematics Magazine, Vol. 47 (1974), 158-159 và mở rộng thứ hai được đưa ra bởi S. H. Weintraub trong bài báo *A mild generazation of Eisenstein criterion*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 141 (2013), 1159-1160. Phần tiếp theo trình bày một trong những tiêu chuẩn bất khả quy phổ biến nhất, đó là tiêu chuẩn rút gọn theo module một số nguyên tố. Phát biểu đảo của tiêu chuẩn này không còn đúng nữa, chúng tôi đưa ra một chứng minh chi tiết để minh họa điều này.

1.1 Tiêu chuẩn Eisenstein và một số mở rộng

Trong mục này, chúng tôi trình bày lại tiêu chuẩn Eisenstein và một số mở rộng liên quan về tính bất khả quy của các đa thức với hệ số nguyên trên trường các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$. Đây là một trong những tiêu chuẩn quen thuộc thường được sử dụng khi làm các bài toán về tính bất khả quy của đa thức trên $\mathbb{Q}$.

Cho

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

là đa thức bậc n với $a_i \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0$.

Tiêu chuẩn bất khả quy được biết đến nhiều nhất hiện nay là tiêu chuẩn Eisenstein, được phát biểu như sau.

1.1.1 Định lý 1. *Cho đa thức $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ là đa thức với hệ số nguyên có bậc $n > 0$. Nếu tồn tại một số nguyên tố p sao cho $p \nmid a_n, p \mid a_i$ với mọi $i = 0, 1, \ldots, n-1$ và $p^2 \nmid a_0$, thì đa thức $f(x)$ bất khả quy trên $\mathbb{Q}$.*

Chứng minh. Giả sử $f(x)$ khả quy trên $\mathbb{Q}$. Theo Bổ đề Gauss, tồn tại biểu diễn $f(x) = g(x)h(x)$, trong đó $g(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0 \in \mathbb{Z}[x]$ và $h(x) = c_k x^k + \cdots + c_1 x + c_0 \in \mathbb{Z}[x]$ với $\deg g(x) = m,\ \deg h(x) = k$ và $m, k < n$. Do p là ước của $a_0 = b_0 c_0$ nên $p \mid b_0$ hoặc $p \mid c_0$. Mặt khác, p^2 không là ước của a_0 nên trong hai số b_0 và c_0, chỉ có một và chỉ một số chia hết cho p. Giả thiết $p \mid c_0$. Khi đó b_0 không chia hết cho p. Vì $a_n = b_m c_k$ và $p \nmid a_n$ nên b_m và c_k đều không chia hết cho p. Do đó tồn tại số r bé nhất sao cho c_r không là bội của p. Ta có

$$a_r = b_0 c_r + (b_1 c_{r-1} + b_2 c_{r-2} + \cdots + b_r c_0).$$

Vì $r \leq k < n$ nên $p \mid a_r$. Theo cách chọn r ta có

$$p \mid b_1 c_{r-1} + b_2 c_{r-2} + \cdots + b_r c_0.$$

Suy ra $p \mid b_0 c_r$, điều này là vô lí vì cả hai số b_0 và c_r đều không là bội của p. Vậy $f(x)$ là bất khả quy trên $\mathbb{Q}$. □

Các đa thức thỏa mãn Định lý 1 được gọi là *đa thức Eisenstein*. Chẳng hạn, đa thức $x^5 - 4x^4 + 18x^3 + 24x^2 + 4x + 6$ là đa thức Eisenstein vì nó bất khả quy theo Tiêu chuẩn Eisenstein với $p = 2$.

Thông thường, Tiêu chuẩn Eisenstein không áp dụng được trực tiếp cho đa thức $f(x)$, mà chúng ta có thể áp dụng cho đa thức $f(x + a)$ với a là hằng số nào đó. Chú ý rằng đa thức $f(x)$ là bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ nếu và chỉ nếu đa thức $f(x + a)$ là bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ với mọi số nguyên a. Do vậy, chúng ta cố gắng tìm hằng số a với hy vọng khi biến đổi đa thức $f(x + a)$ ta được một đa thức mới thỏa mãn các điều kiện của Tiêu chuẩn Eisenstein. Dưới đây là một ví dụ về tính bất khả quy của đa thức chia đường tròn thứ p với p là một số nguyên tố.

1.1.2 Ví dụ 1. Cho p là số nguyên tố. Khi đó đa thức chia đường tròn thứ p

$$f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$$

là bất khả quy trên $\mathbb{Q}$.

Chứng minh. Đa thức $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ có các hệ số đều bằng 1 nên không thể áp dụng trực tiếp Tiêu chuẩn Eisenstein để xét tính bất khả quy của $f(x)$.

Chú ý rằng $f(x) = \dfrac{x^p - 1}{x - 1}$. Suy ra, chọn $a = 1$ ta có

$$f(x+1) = \frac{(x+1)^p - 1}{x} = x^{p-1} + C_p^1 x^{p-2} + \ldots + C_p^{p-2} x + C_p^{p-1},$$

trong đó $C_p^k = \dfrac{p!}{(p-k)!k!}$ là số tổ hợp chập k của p phần tử. Do p nguyên tố nên C_p^k là bội của p với mọi $k = 1, 2, \ldots, p-2$ và $C_p^{p-1} = p$ không là bội của p^2. Vì vậy $f(x+1)$ là bất khả quy theo Tiêu chuẩn Eisenstein (áp dụng cho số nguyên tố p). Do đó $f(x)$ bất khả quy trên $\mathbb{Q}$. $\square$

Như vậy, thông qua tiêu chuẩn Eisenstein, từ bài toán ban đầu về xét tính bất khả quy của đa thức bậc n với hệ số nguyên, ta đưa về bài toán phân tích n hệ số của đa thức mới $f(x+a)$, sau khi biến đổi đa thức $f(x+a)$ cần tìm ra ước chung nguyên tố phù hợp của các hệ số, trừ hệ số cao nhất, của đa thức $f(x+a)$. Hiển nhiên, chúng ta cố gắng biến đổi đa thức để tạo ra đa thức mới với hệ số lớn hơn, nhưng nhiệm vụ sau đó là tính toán và kiểm tra các ước nguyên tố chung của các hệ số thỏa mãn điều kiện trong Tiêu chuẩn Eisenstein. Tuy nhiên, chúng ta chưa chắc chắn về sự tồn tại của phép biến đổi để đa thức ban đầu chuyển thành đa thức mới có thể áp dụng tiêu chuẩn Eisenstein, tức là chưa chắc đã tìm được số nguyên a để đa thức $f(x+a)$ áp dụng được Tiêu chuẩn Eisenstein ứng với một số nguyên tố p nào đó. Ví dụ, người ta đã chỉ ra rằng đa thức $x^4 - 10x^2 + 1$ là bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ nhưng không tìm được số nguyên a để đa thức

$$(x+a)^4 - 10(x+a)^2 + 1$$

bất khả quy theo Tiêu chuẩn Eisenstein với một số nguyên tố p nào đó.

Trong phần cuối của mục này, chúng ta nhắc lại một số mở rộng của Tiêu chuẩn Eisenstein. Trước hết chúng ta nhắc lại tiêu chuẩn bất khả quy của H. Chao trong bài báo *A Generalization of Eisenstein's Criterion*, Mathematics Magazine, Vol. 47 (1974), 158-159.

1.1.3 Định lý 2. *Cho $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ là đa thức bậc n với hệ số nguyên. Giả sử p là một số nguyên tố sao cho có hai chỉ số $t \neq k$ thỏa mãn: p không là ước của a_t, p là ước của a_i với mọi $i \neq t$ và p^2 không là ước của a_k. Khi đó nếu $f(x)$ là tích của hai đa thức với hệ số nguyên, thì một trong hai đa thức đó có bậc lớn hơn hoặc bằng $\mid t - k \mid$.*